В. А. ЗОРИЧ

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

(Материал к лекциям по анализу первого семестра)

Корни уравнений и неподвижные точки отображений

Заметим, что уравнение $f(x) = 0$, очевидно, равносильно уравнению $\alpha(x)f(x) = 0$, если $\alpha(x) \neq 0$. Последнее уравнение, в свою очередь, равносильно соотношению $x = x - \alpha(x)f(x)$, в котором x можно интерпретировать как неподвижную точку отображения $\varphi(x) := x - \alpha(x)f(x)$.

Таким образом, отыскание корней уравнений равносильно отысканию неподвижных точек соответствующих отображений.

Сжимающие отображения и итерационный процесс

Отображение $\varphi : X \to X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ в себя будем называть *сжимающим отображением*, если существует такое число q, $0 \leq q < 1$, что для любой пары точек x', x'' и их образов $\varphi(x'), \varphi(x'')$ выполняется неравенство $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q|x' - x''|$.

Ясно, что это определение без изменений распространяется на отображения любых множеств, где определено расстояние $d(x', x'')$ между точками; в нашем случае $d(x', x'') = |x' - x''|$.

Ясно также, что сжимающее отображение непрерывно и может иметь не более одной неподвижной точки.

Пусть $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Покажем, что *итерационный процесс* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, начинающийся в любой точке x_0 этого отрезка приводит к точке $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, неподвижной для отображения φ.

Заметим сначала, что

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq ... \leq q^n|x_1 - x_0| \ ,$$

поэтому для любых натуральных m, n, таких что $m > n$, вставляя промежуточные точки и используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + ... + |x_1 - x_0| \leq (q^m + ... + q^n)|x_1 - x_0| < \frac{q^n}{1-q} \ ,$$

из которой следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная (последовательность Коши).

Значит по критерию Коши она сходится к некоторой точке x отрезка $[a, b]$. Эта точка — неподвижная точка отображения $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, ибо переход к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, дает равенство $x = \varphi(x)$.

(Здесь мы воспользовались тем очевидным фактом, что сжимающее отображение непрерывно; кстати, оно даже равномерно непрерывно.)

Переход к пределу при $m \to \infty$ в соотношении $|x_m - x_n| < \frac{q^n}{1-q}$, дает оценку

$$|x - x_n| < \frac{q^n}{1-q} \ ,$$

величины уклонения приближения x_n от неподвижной точки x отображения φ.

Метод касательных (метод Ньютона)

Доказывая теорему о том, что непрерывная на отрезке вещественнозначная функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, имеет на этом отрезке по крайней один нуль (точку, где $f(x) = 0$), мы предъявили и простейший (но зато универсальный) алгоритм отыскания этой точки (деление отрезка пополам). Скорость сходимости тут порядка 2^{-n}.

В случае дифференцируемой выпуклой функции можно пользоваться значительно более эффективным в смысле скорости сходимости методом, предложенным еще Ньютоном.

Строим касательную к графику данной функции f в некоторой точке $(x_0, f(x_0))$, где $x_0 \in [a, b]$. Находим точку x_1, где эта касательная пересекает ось абсцисс. Повторяя процесс, получаем последовательность $\{x_n\}$ точек, которые быстро сходятся к точке x, в которой $f(x) = 0$. (Можно проверить, что каждая следующая итерация приводит к удвоению верных значащих цифр приближения к x.)

Аналитически, как легко проверить (проверьте!) метод касательных сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Например, решение уравнения $x^m - a = 0$, т.е. вычисление $\sqrt[m]{a}$, при этом сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right) \ .$$

В частности, для вычисления $\sqrt{a}$ методом касательных получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ .$$

Метод Ньютона, как видно из приведенных формул, ищет неподвижные точки отображения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Оно является специальным случаем рассмотренного в самом первом разделе отображения $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и получается из него при $\alpha(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Заметим, что в общем случае отображение $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и даже отображение $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, участвующее в методе касательных, не обязано быть сжимающим. Более того, как показывают простые примеры, в случае общей функции f даже метод касательных не всегда приводит к сходящемуся итерационному процессу.

Если же в выражении $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ функцию $\alpha(x)$ удается выбрать так, что на рассматриваемом отрезке $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то отображение $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, конечно, будет сжимающим.

В частности, если в качестве α взять постоянную $\frac{1}{f'(x_0)}$, то получим $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$ и $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}$. Если производная функции f непрерывна, по крайней мере в точке x_0, то в некоторой ее окрестности будем иметь $|\varphi'(x)| = |1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}| \leq q < 1$. Если отображение φ переводит эту окрестность в себя (что не всегда так), то стандартный итерационный процесс, индуцированный сжимающим отображением φ этой окрестности, приведет к единственной в этой окрестности неподвижной точке отображения φ, в которой исходная функция f обращается в нуль.